MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DES ŒUVRES UNIVERSITAIRES (DGES)

DIRECTION DE l'ORIENTATION ET DES EXAMENS (DOREX)

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours ITA session 2014

Composition : **Mathématiques 7** (algèbre, analyse)

Durée : **2 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 :

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0. \qquad (E)$$

1) Vérifier que 0 n'est pas solution et établir que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E_1) :

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0. \qquad (E_1)$$

2) On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à une équation de second degré en u qu'on notera (E_2) à déterminer.

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_2). En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 :

Soit $P = X^3 + X - 1 \in \mathbb{C}$. On note x_1, x_2 et x_3 ses trois racines complexes.

1) Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes.

2) Effectuer la division euclidienne de X^5 par P.

3) En déduire la valeur de $S = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Exercice 3 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de la matrice carrée A noté $\det(A)$.
2) On considère le polynôme à cœfficients réels de degré 2 noté $P(x)$ tel que $P(x) = \det(A - xI_2)$.
   a. Développer $P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix}$.
   b. Factoriser $P(x)$.
3) a. Calculer la matrice $M^2 - 5M + 4I_2$.
   b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
   c. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$.
   d. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g respectivement par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

et on pose

$$I = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 g(t)dt.$$

1) Calculer $I + J$.
2) Donner une primitive de g sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de J, puis celle de I.
3) On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$. On note A l'aire, en unités d'aire, du domaine Δ.
   a. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant g(x)$.
   b. Exprimer A en fonction de I et J.